Formalismo da matriz densidade [PLENIO 2.4]

- Serve p/ generalizar o postulado da descrição de est. quânticos.
- Útil p/ descrever processos probabilísticos de produção de estados (+ realista) e p/ a descrição de partes de sist. quânticos (emaranhamento, etc.)
- Vamos usar muito o Traço de uma matriz. Podemos reescrever as fórmulas p/
  - as prob. de medida
  - o valor esperado de um observável.

- $p(a_i) = \langle\psi|\hat{P}_i|\psi\rangle$ onde $\hat{P}_i = |a_i\rangle\langle a_i|$ (com adaptação p/ o caso degenerado)

$$|\psi\rangle = \sum_i |a_i\rangle\langle a_i|\psi\rangle \quad \leftrightarrow \quad \langle\psi| = \sum_i \langle a_i|\langle\psi|a_i\rangle$$

$$p(a_i) = \langle\psi|\hat{P}_i|\psi\rangle = \sum_i \langle a_i|\langle\psi|a_i\rangle\hat{P}_i|\psi\rangle = \sum_i \langle a_i|\hat{P}_i|\psi\rangle\langle\psi|a_i\rangle$$

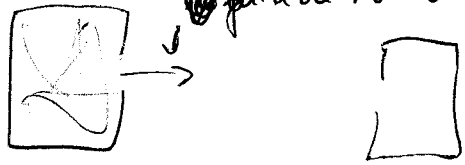
$$= Tr(\hat{P}_i|\psi\rangle\langle\psi|) \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} p(a_i) &= \langle\psi|\hat{P}_i|\psi\rangle \\ &= Tr(\hat{P}_i|\psi\rangle\langle\psi|)\end{aligned}}$$

- Da mesma forma $\boxed{\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle = Tr(\hat{A}|\psi\rangle\langle\psi|)}$

- Até agora, nada de novo, só uma forma de reescrever essas duas fórmulas usando o traço.

• Vamos agora imaginar uma situação p/ motivar a introdução da matriz-densidade.

feixe de sist. de 2 níveis



FORNO

LAB. p/ medir $\langle A \rangle$.

Nossa terminologia p/ o que chamaríamos simplesmente de "estado"!

- O forno não cria ~~estados~~ sempre o mesmo estado puro $|\psi\rangle$. Ao invés, ele emite um conj. de est. puros $|\psi_i\rangle$, cada um com probabilidade p_i:

ESTADO prep. pelo forno:
$$\begin{cases} |\psi_1\rangle \text{ com prob. } p_1 \\ |\psi_2\rangle \text{ com prob. } p_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \end{cases}$$

- No laboratório, um experimental mede $\langle A \rangle$. O que ele obtém?

$$\langle A \rangle = \sum_i p_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle = \sum_i p_i \, \mathrm{Tr}\left[A |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \right]$$

- Isso está correto mas não nos ajuda a calcular $\langle B \rangle$, por exemplo. Vamos reescrevê-la p/ separar mais claramente as características do observável daquelas do feixe = ensemble estatístico de partículas.

$$\langle A \rangle = \sum_i p_i \, \mathrm{Tr}\left[A |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \right] = \mathrm{Tr}\left[A \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \right] = \mathrm{Tr}\left[A \rho \right]$$

onde definimos o operador densidade $\boxed{\rho \equiv \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|}$

$$\langle A \rangle = \mathrm{Tr}\left[\underbrace{A}_{\text{Descrição do observável}} \; \overbrace{\rho}^{\text{Descrição completa do ensemble de estados puros preparados pelo forno.}} \right]$$

• Se quisermos $\langle B \rangle$, basta usar o mesmo ρ acima: $\langle B \rangle = \mathrm{Tr}(B\rho)$.

- ρ é operador que representa uma <u>mistura estatística</u> de estados puros, e por isso dizemos que ρ representa <u>estados mistos</u> (em geral).
- Repare que a <u>mistura estatística</u> de estados é diferente da <u>superposição</u> de estados:

  - Se $|\psi\rangle = \sum_i \alpha_i |\psi_i\rangle$ ← superposição

    $\Rightarrow \rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j^* |\psi_i\rangle\langle\psi_j|$

  - Vamos agora considerar uma <u>mistura</u> dos estados $|\psi_i\rangle$ com pesos estatísticos $p_i = |\alpha_i|^2$:

    $$\rho' = \sum_i \underbrace{|\alpha_i|^2 |\psi_i\rangle\langle\psi_i|}_{\text{é diagonal}} \neq \overbrace{\rho_\psi}^{\text{Não é diagonal}}$$

  - Como $\rho' \neq \rho_\psi$, os valores esperados de observáveis em geral serão diferentes — são estados mistos diferentes, aliás.

PROPRIEDADES da matriz-densidade

- Qualquer matriz-densidade $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ satisfaz:

1. ρ é Hermitiana.
2. ρ é operador positivo, semi-definido: $\forall\, |\psi\rangle$, $\langle\psi|\rho|\psi\rangle \geq 0$.
3. $Tr(\rho) = 1$.

PROVA: $\Rightarrow$

PROVA:

1. $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \Rightarrow \rho^\dagger = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \rho$

2. $\langle\phi|\rho|\phi\rangle = \langle\phi|\underbrace{\sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|}_{\rho}|\phi\rangle = \sum_i p_i \langle\phi|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\phi\rangle$

$$= \sum_i p_i |\langle\psi|\psi_i\rangle|^2 \geq 0.$$

3. $Tr(\rho) = tr\left[\sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right] = \sum_i p_i Tr(|\psi_i\rangle\langle\psi_i|)$

mas $Tr(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_i \langle a_i|\psi\rangle\langle\psi|a_i\rangle = \sum_i |\langle a_i|\psi\rangle|^2 = 1$

$\Rightarrow Tr(\rho) = \sum_i p_i = 1$. (Consequência da normalização das probabilidades)

— || —

• Estados puros: $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ para algum $|\psi\rangle$, i.e. corresponde a vetor no espaço de Hilbert.

~~Podemos mostrar que $\rho^2 = \rho \Leftrightarrow \rho$ é puro.~~

~~PROVA: $\Leftarrow$: ρ puro $\Rightarrow \rho = |\phi\rangle\langle\phi| \Rightarrow \rho$ é projetor $\Rightarrow \rho^2 = \rho$ (propriedade de projetor).~~

~~$\Rightarrow$: $\rho^2 = \rho$, ρ é Hermitiano $\Rightarrow \rho$ é projetor~~

~~$\Rightarrow \rho = \sum_{k=1}^{n} |\phi_k\rangle\langle\phi_k|$. Mas $tr(\rho) = 1 \Rightarrow Tr(\rho) = \sum_j \sum_{k=1}^{n} \langle a_j|\phi_k\rangle\langle\phi_k|a_j\rangle$~~

~~$= \sum_k \underbrace{\sum_j |\langle a_j|\phi_k\rangle|^2}_{1} = \sum_{k=1}^{n} = 1 \Rightarrow n = 1$~~

~~$\Rightarrow \rho = |\phi\rangle\langle\phi|$~~

~~$\Rightarrow \rho$ é puro.~~

Propriedades do espectro de ρ: [BALL. 2.3]

(1) $\rho = \sum_n p_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n|$ ← representação espectral (possível pois ρ é hermitiano)

(2) Como $Tr(\rho) = 1 \Rightarrow \sum_n p_n = 1$

(3) Como $\rho = \rho^+ \Rightarrow p_n$ são reais

(4) $\langle\psi|\rho|\psi\rangle \geq 0 \xRightarrow{\text{uso } |\psi\rangle = |\phi_n\rangle} \langle\phi_j| \sum_n p_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n| \phi_j\rangle \geq 0$

$\Rightarrow p_j \geq 0$ Logo $\boxed{\langle\psi|\rho|\psi\rangle \geq 0 \Rightarrow p_j \geq 0}$

Na verdade, as 2 condições são equivalentes. Assuma que $p_j \geq 0 \ \forall j$. $|\psi\rangle$ é estado arbitrário. então $\Rightarrow \langle\psi| \sum_n p_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n| \psi\rangle$ $= \sum_n |\langle u|\phi_n\rangle|^2 p_n$. $\boxed{\text{Se } p_n \geq 0 \ \forall n \Rightarrow \langle\psi|\rho|\psi\rangle \geq 0 \text{ também.}}$

- Dada uma matriz ρ, o jeito + fácil de verificar se $\rho \geq 0$ é diagonalizando e verificando se $p_n \geq 0 \ \forall n$.

(5) Como $\sum_n p_n = 1$ e $p_n \geq 0 \Rightarrow 0 \leq p_n \leq 1$

- O conj. de op. densidade é convexo. Isso significa que se ρ e σ são op. densidade, $\rho' = \underbrace{p_1 \rho + p_2 \sigma}_{= \text{combinação convexa de } \rho \text{ e } \sigma}$ também é $\begin{pmatrix} p_1, p_2 \geq 0 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{pmatrix}$.

Estados puros x estados mistos

- Estado puro corresponde a vetor no sp. de $\mathcal{H}$. O op. densidade correspondente $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Est. puros não são misturas estatísticas.

- Outra condição necessária e suficiente: ρ é puro $\Leftrightarrow \rho^2 = \rho$

  - Se ρ é puro, $\rho = \underbrace{|\psi\rangle\langle\psi|}_{\text{Projetor}} \Rightarrow \rho^2 = (|\psi\rangle\langle\psi|)^2 = |\psi\rangle\langle\psi| = \rho$. (propriedade de projetores)

  - Se $\rho^2 = \rho$, considere a representação espectral de ρ e ρ^2. $\rho = \sum_n p_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n|$, $\rho^2 = \sum_n p_n^2 |\phi_n\rangle\langle\phi_n|$

  $\Rightarrow p_n^2 = p_n \Rightarrow p_n = 0$ ou 1.

  Como $\sum_n p_n = 1$, $p_j = 1$ e os outros $p_{i \neq j} = 0$. $\Rightarrow \rho = |\phi_j\rangle\langle\phi_j| \Rightarrow \rho$ é puro.

- Mais uma cond. necessária e suficiente: ρ é puro $\Leftrightarrow Tr(\rho^2) = 1$.

$\Rightarrow$ - ρ é puro $\Rightarrow \rho^2 = \rho \Rightarrow Tr(\rho^2) = Tr(\rho) = 1$.

$\Leftarrow$ $Tr(\rho^2) = \sum_n p_n^2 \leq \sum_n p_n = 1 \Rightarrow Tr(\rho^2) \leq 1$.

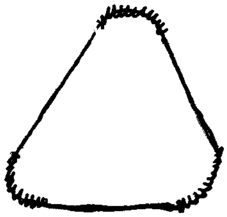
A igualdade só vale se $p_n^2 = p_n \; \forall n \Rightarrow p_n = 0$ ou 1. Como vimos, $p_j = 1$ e $p_{i \neq j} = 0$ $\Rightarrow \rho = |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$ puro.

- Uma distinção fundamental entre ρ puro e misto.

<u>Teorema</u>: ρ puro não pode ser escrito como comb. convexa não-trivial de outros estados, mas qualquer estado ρ misto pode.

[ver Ball. 2.3]

Geometricamente:

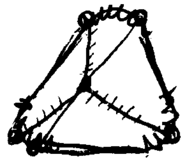


CORPO CONVEXO

~~ = ESTADOS PUROS

e estados no interior = estados mistos.

• Em geral, elementos de um conjunto convexo podem ser escritos como comb. convexas dos est. extremos (= puros, no nosso caso) de várias formas diferentes. Ex:



• Isso acontece com estados mistos. Veja:

$$\rho_a = a\,|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + (1-a)\,|\phi_2\rangle\langle\phi_2| \quad , \quad \langle\phi_1|\phi_2\rangle = 0.$$

- Defina novos vetores

$$\begin{cases} |x\rangle = \sqrt{a}\,|\phi_1\rangle + \sqrt{1-a}\,|\phi_2\rangle \\ |y\rangle = \sqrt{a}\,|\phi_1\rangle - \sqrt{1-a}\,|\phi_2\rangle \end{cases}$$

Em termos destes:

$$\rho_a = \frac{1}{2}|x\rangle\langle x| + \frac{1}{2}|y\rangle\langle y|$$

⇒ Em geral existem infinitas combinações convexas diferentes resultando no mesmo operador densidade misto.

Exemplos: (SPIN $\frac{1}{2}$)

① Feixe polarizado, estado $S_z\uparrow$: $|+\rangle_z$.

$$\rho = |+\rangle\langle+| \doteq \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1,0) = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \qquad \text{(puro)}$$

② Feixe $S_x\uparrow$: $|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z \pm |-\rangle_z\right)$

$$\rho = |\pm\rangle_x\langle\pm|_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \pm\frac{1}{2}\\ \pm\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \qquad \text{(puro)}$$

③ Feixe sem polarização – est. térmico com $T\to\infty$.

$$\rho = \frac{1}{2}|+\rangle\langle+| + \frac{1}{2}|-\rangle\langle-| = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\rho = \frac{1}{2}|+\rangle_x\langle+|_x + \frac{1}{2}|-\rangle_x\langle-|_x = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Exemplo da multiplicidade de decomposição de est. mistos.

Sistemas compostos

- Vimos que estados mistos aparecem de forma natural em situações onde perdemos informação sobre o processo de preparação de estados
  $\Rightarrow$ estados mistos são misturas estatísticas de estados puros.

- Vamos agora estudar uma outra situação em que estados mistos aparecem de forma natural ~~..~~ — na descrição de uma parte de um sist. quântico composto.
  $\Rightarrow$ Mesmo quando o sist. completo está em est. puro, o est. de cada parte pode ser misto.

Sistema com 2 partículas

- Part. A descrita por vetor $|\phi_A\rangle$ em $\mathcal{H}_A$; base $\{|\phi_i\rangle_A\}$, $\dim(\mathcal{H}_A) = N$
  B $|\psi_B\rangle$ $\mathcal{H}_B$; base $\{|\psi_j\rangle_B\}$, $\dim(\mathcal{H}_B) = M$

- Suponha agora que $\begin{cases} |\phi_A\rangle = |\phi_i\rangle_A \\ |\psi_B\rangle = |\psi_j\rangle_B \end{cases}$ $\Rightarrow$ O est. conjunto é dado pelo produto tensorial

$$|\psi_{TOT}\rangle = |\phi_j\rangle \otimes |\psi_j\rangle$$

$\Rightarrow$ é vetor em ~~espaço~~ $\mathcal{H}$ de dimensão $N \cdot M$, com base $\{|\phi_i\rangle \otimes |\psi_j\rangle\}$

- Se $|\phi\rangle_A = a_1|\phi_1\rangle_A + a_2|\phi_2\rangle_A$; $|\psi\rangle_B = |\psi_1\rangle_B$

$$\Rightarrow |\psi_{TOT}\rangle = (a_1|\phi_1\rangle_A + a_2|\phi_2\rangle_A) \otimes |\psi_1\rangle_B = a_1|\phi_1\rangle_A \otimes |\psi_1\rangle_B + a_2|\phi_2\rangle_A \otimes |\psi_1\rangle_B$$

- Em geral:

$$\left(\sum_i a_i|\phi_i\rangle_A\right) \otimes \left(\sum_j b_j|\psi_j\rangle_B\right) = \sum_{i,j} a_i b_j |\phi_i\rangle \otimes |\psi_j\rangle$$

que é o est. puro mais geral do sist. composto.

• Queremos que $\mathcal{H}_{AB}$ "herde" as propriedades do produto escalar definido para os subsistemas $\mathcal{H}_A$ e $\mathcal{H}_B$. Isso acontece se definirmos:

$$\left(\langle\psi_1|_A \otimes \langle\psi_2|_B\right)\cdot\left(|\phi_1\rangle_A\otimes|\phi_2\rangle_B\right) = \langle\psi_1|\phi_1\rangle_A\,\langle\psi_2|\phi_2\rangle_B$$

• Ação de operadores:

$$A\otimes B\left(|\phi\rangle_A\otimes|\psi\rangle_B\right) = A|\phi_A\rangle\otimes B|\psi\rangle_B$$

• Para que as propriedades acima sejam válidas em qualquer representação, precisamos saber como escrever o produto tensorial como vetores-coluna:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix}}_{|\phi_A\rangle\otimes|\psi_B\rangle} = \begin{pmatrix} a_1\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix} \\ \vdots \\ a_N\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 \\ \vdots \\ a_Nb_M \end{pmatrix}$$

• Representação p/ $A\otimes B$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}}_{A} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1M} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{M1} & \cdots & b_{MM} \end{pmatrix}}_{B} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1N}B \\ \vdots & & \\ a_{N1}B & \cdots & a_{NN}B \end{pmatrix}}_{A\otimes B}$$

<u>Exemplo simples</u>: A e B são mat. de 2 níveis.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}_{|\psi\rangle_A\otimes|\phi_B\rangle} = \begin{pmatrix} a_1b_1 \\ a_1b_2 \\ a_2b_1 \\ a_2b_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A}\otimes\underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}}_{B} = \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ \hline a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{array}\right)$$

Estados emaranhados

- Construímos uma base p/ $\mathcal{H}_{AB}$ a partir de 2 bases: $\{|\phi_i\rangle_A\}$ p/ $\mathcal{H}_A$, $\{|\psi_i\rangle_B\}$ p/ $\mathcal{H}_B$

- Cada vetor-base é da forma $|\phi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B$. Mas como podemos fazer superposições arbitrárias, nem todo est. quântico em $\mathcal{H}_{AB}$ será dessa forma. [estado produto]

EXEMPLO: $|\psi\rangle_{TOT} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_A \otimes |+\rangle_B + |-\rangle_A \otimes |-\rangle_B \right)$ (*)

onde $\begin{cases} S_z|+\rangle = +\frac{\hbar}{2}|+\rangle \\ S_z|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}|-\rangle \end{cases}$.

- Será que $|\psi\rangle_{TOT}$ pode ser escrito como $|\phi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B$?

$$|\phi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B = (\alpha|+\rangle_A + \beta|-\rangle_A) \otimes (\gamma|+\rangle_B + \delta|-\rangle_B)$$

$$= \alpha\gamma|+_A +_B\rangle + \alpha\delta|+_A -_B\rangle + \beta\gamma|-_A +_B\rangle + \beta\delta|-_A -_B\rangle$$

comparo com (*): $\alpha\delta = \beta\gamma = 0 \Rightarrow$ Não podemos escolher $\alpha = 0$ nem $\beta = 0$ nem $\gamma = 0$ nem $\delta = 0$ (**)

$\Rightarrow |\psi\rangle_{TOT}$ acima não pode ser escrito como estado produto.

- Estados que não podem ser escritos como est. produto são chamados de Estados emaranhados

~~$\Rightarrow$ úteis em: computação quântica, criptografia quântica, teletransporte q., etc.~~

Algumas propriedades de estados emaranhados:

[Veremos logo mais]

(I) Est. global é bem definido (puro), mas est. de subsistemas não é (misto).

Classicamente isso é impossível: [a entropia total é a soma das entropias das partes] ⟸ não é falso p/ est. emaranhados.

(II) Medidas em est. emaranhados revelam a não-localidade quântica (violação de desigualdades de Bell).

(III) Emaranhamento é um recurso usado em diversas aplicações de informação quântica, como criptografia, computação quântica e protocolos como teletransporte quântico.

Descrevendo subsistemas

- Alice e Bob compartilham estado ρ_{AB}.

  Base p/ sub-sistema de A: $\{|\phi_i\rangle_A\}$ $i=1,\dots,N$

  " B: $\{|\psi_i\rangle_B\}$, $i=1,\dots,M$.

- Bob não dá acesso à part. B p/ Alice. Alice quer medir $\langle A\rangle$, onde

  $\hat{A} = \hat{A}\otimes \mathbb{1}$ é observável do sist. de Alice.

  traço sobre os 2 sistemas

  $$\langle \hat{A}\rangle = \sum_{ij} {}_A\langle\phi_i|\,{}_B\langle\psi_j|\,\hat{A}\otimes\mathbb{1}\,|\phi\rangle_A|\psi\rangle_B = \mathrm{Tr}_{AB}\left[\hat{A}\otimes\mathbb{1}\,\rho_{AB}\right]$$

  $$\Rightarrow \boxed{\langle A\rangle = \mathrm{Tr}_{AB}\left[\hat{A}\otimes\mathbb{1}\,\rho_{AB}\right]}$$

- – Fórmula correta, mas deve ser possível re-escrevê-la sem ref. do sist. de Bob.

- Quero definir ρ_A p/ sist. de A tal que $\langle A\rangle = \mathrm{tr}_{AB}[A\otimes\mathbb{1}\rho_{AB}] = \mathrm{tr}_A[\hat{A}\rho_A]$ $\forall\hat{A}$.

$$\langle A\rangle = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} {}_A\langle\phi_i|\,{}_B\langle\psi_j|\,A\otimes\mathbb{1}\,\rho_{AB}\,|\phi_i\rangle_A|\psi_j\rangle_B$$

$$= \sum_{i=1}^{N} {}_A\langle\phi_i|\,\hat{A}\left(\sum_{j=1}^{M} {}_B\langle\psi_j|\rho_{AB}|\psi_j\rangle_B\right)|\phi_i\rangle_A = \mathrm{Tr}_A\left[A\,\rho_A\right]$$

com $\rho_A = \sum_{j=1}^{M} {}_B\langle\psi_j|\rho_{AB}|\psi_j\rangle_B = \mathrm{Tr}_B(\rho_{AB})$

É traço parcial sobre B – o somatório é só sobre base de B.

$$\Rightarrow \boxed{\langle A\rangle = \mathrm{Tr}_A[A\rho_A]}$$

- Como calcular o traço parcial?

- Vamos começar com o caso de um estado produto: $\rho_{AB} = |\phi_1\rangle_A |\psi_1\rangle_B \, {}_A\langle\phi_1| \, {}_B\langle\psi_1|$

$$Tr_B(\rho_{AB}) = \sum_{i=1}^{M} {}_B\langle\psi_i| \big(\underbrace{|\phi_1\psi_1\rangle\langle\phi_1\psi_1|}_{\rho_{AB}}\big) |\psi_i\rangle_B = \sum_{i=1}^{M} |\phi_1\rangle_{A}\langle\phi_1|_{A} \, \langle\psi_i|\psi_1\rangle_B \, \langle\psi_1|\psi_i\rangle_B$$

$$= |\phi_1\rangle_A\langle\phi_1|_A$$

- Para um ρ_{AB} geral, escrevemos ρ_{AB} na base de produtos e usamos a eq. acima.

$$\rho_{AB} = \sum_{i,k=1}^{N} \sum_{j,l=1}^{M} \alpha_{ij,kl} \big(|\phi_i\rangle_A\langle\phi_k|_A\big) \otimes \big(|\psi_j\rangle_B\langle\psi_l|_B\big)$$

$$Tr_B(\rho_{AB}) = \sum_{c=1}^{M} {}_B\langle\psi_c| \; \rho_{AB} \; |\psi_c\rangle_B = \sum_{c=1}^{M} \sum_{i,k=1}^{N} \sum_{j,l=1}^{M} \alpha_{ij,kl} |\phi_i\rangle_A\langle\phi_k|_A \underbrace{\langle\psi_c|\psi_j\rangle_B}_{\delta_{cj}} \underbrace{\langle\psi_l|\psi_c\rangle_B}_{\delta_{lc}}$$

[elimino $\sum_{j,l}$]

$$\Rightarrow \rho_B = \sum_{i,k=1}^{N} \Big(\sum_{c=1}^{M} \alpha_{ic,kc}\Big) |\phi_i\rangle_A\langle\phi_k|_A$$

<u>Exemplo</u>: $\mathcal{H}_A$, base $\{|1\rangle_A, |2\rangle_A\}$; $\mathcal{H}_B$, base $\{|1\rangle_B, |2\rangle_B\}$ } 2 sist. de 2 níveis.

Base p/ $\mathcal{H}_{AB}$: $\{|11\rangle, |12\rangle, |21\rangle, |22\rangle\}$ = sist. de 4 níveis.

considere o estado:

$$\rho_{AB} = \tfrac{1}{3}|11\rangle\langle 11| + \tfrac{1}{3}|11\rangle\langle 12| + \tfrac{1}{3}|11\rangle\langle 21| + \tfrac{1}{3}|12\rangle\langle 11| + \tfrac{1}{3}|12\rangle\langle 12| + \tfrac{1}{3}|12\rangle\langle 21| + \tfrac{1}{3}|21\rangle\langle 11| + \tfrac{1}{3}|21\rangle\langle 12| + \tfrac{1}{3}|21\rangle\langle 21|$$

$$= \frac{1}{3} \; \begin{array}{c|cccc} & \langle 11| & \langle 12| & \langle 21| & \langle 22| \\ \hline |11\rangle & 1 & 1 & 1 & \\ |12\rangle & 1 & 1 & 1 & \\ |21\rangle & 1 & 1 & 1 & \\ |22\rangle & & & & \end{array}$$

• Agora tiro o $tr_B(\rho_{AB})$ = junto termos com estados da forma $|i\rangle\langle i|_{BB}$.

$$\Rightarrow \rho_A = \underbrace{\frac{1}{3}|1\rangle\langle 1| + \frac{1}{3}|1\rangle\langle 1|} + \frac{1}{3}|2\rangle\langle 2| + \frac{1}{3}|2\rangle\langle 1| + \frac{1}{3}|2\rangle\langle 2|$$

$$= \frac{2}{3}|1\rangle\langle 1| + \frac{1}{3}|1\rangle\langle 2| + \frac{1}{3}|2\rangle\langle 1| + \frac{1}{3}|2\rangle\langle 2|$$

$$= \frac{1}{3}\begin{array}{c|cc} & \langle 1| & \langle 2| \\ \hline |1\rangle & 2/3 & 1/3 \\ |2\rangle & 1/3 & 1/3 \end{array}$$

$tr(\rho_A^2) < 1 \Rightarrow$ estado <u>misto</u>.

• Mas ρ_{AB} é <u>puro</u>: $\rho_{AB} = |\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|$ com $|\psi_{AB}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|11\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|12\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|21\rangle$

$\Rightarrow$ Est. global <u>puro</u>, mas ρ_A <u>misto</u>.

• Pode-se mostrar que sempre que ρ_{AB} é puro mas ρ_A é misto, ρ_{AB} trata-se de <u>estado emaranhado</u>.

—— || ——